UNIVERSIDAD DE LA FRONTERA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Examen Calificación (Parte II)
Doctorado en ciencias mención matemática

Nota. Cada pregunta es de desarrollo, justifique todos los pasos en su desarrollo.

1. Sea $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y defina $g, h : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ por
$$g(x) = \frac{f'(x)}{x} \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{f(x)}{x}.$$
Suponga que g es una función acotada. Demuestre que h es uniformemente continua.

2. (a) Sea $f : X \to Y$ una equivalencia homotópica, donde X es un espacio topológico conexo por caminos e Y es un espacio topológico. Demuestre que Y es conexo por caminos.
   (b) Calcular el grupo fundamental de $X = A \cup B$, donde
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ y \leq 0\},$$
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ y \geq 0, \ z = 0\}.$$
   (c) Un espacio X conexo por caminos, localmente conexo por caminos, semilocalmente simplemente conexo tiene un grupo fundamental $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. ¿Cuántas (clases de equivalencia) de espacios cubrimiento conexos por caminos tiene X?

3. (a) Sea R^c el anillo de funciones continuas con valores reales sobre $[0, 1]$, y sea
$$M = \{f \in R^c : \ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0\}.$$
      i. Demostrar que M es un ideal maximal de R^c.
      ii. Demostrar que $M = \langle g \rangle$, donde $g \in R^c$ tal que $g(x) = x - \frac{1}{2}$, para cada $x \in [0, 1]$.
   (b) Considere el anillo cociente $R = \mathbb{Z}[x]/(x^4 + 3x^3 + 1)$.
      i. ¿ Es R un dominio entero? ¿Es R un campo?
      ii. ¿ Tiene R alguna otra unidad además de ± 1? En caso afirmativo, dé un ejemplo de dicha unidad.

4. Sea $H = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donde n es un entero positivo, y sea G el subgrupo de H que consiste de matrices diagonales.
   (a) Suponga que $g \in G$ tiene valores propios distintos. Hallar el centralizador de g en H.
   (b) Para $n = 2$. Hallar el normalizador de G en H.

5. Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V tal que $\mathrm{rank}(T) = 1$. Demostrar que T es diagonalizable o bien nilpotente.